

SERIE NUMERICHE , FUNZIONI RICORSIVE E PRINCIPIO DI INDUZIONE

Consideriamo la seguente serie numerica: 4, 9, 16, 25, 36, ... ; ci chiediamo qual è il numero successivo.

Possiamo fare due ragionamenti:

- 1) Poiché i numeri sono i quadrati di 2, 3, 4, 5, 6, allora il numero cercato è il quadrato di 7, cioè 49.
- 2) Gli incrementi da un numero al successivo sono i numeri: 5, 7, 9, 11, quindi ci aspettiamo che l'incremento seguente è 13. Quindi il numero è 49.

Come si vede abbiamo risolto il problema in due maniere diverse. È lecito allora chiedersi se questi due ragionamenti si possono ritenere equivalenti.

A tal fine, il primo ragionamento lo esprimiamo con la formula $(2+k)^2$ con $k \in \mathbb{N}$; infatti si ha

K	0	1	2	3	4	5	6	...	
$(2+K)^2$	4	9	16	25	36	49	64	...	

Il secondo ragionamento lo esprimiamo con la formula ricorsiva:

$a_0 = 4$, $a_k = a_{k-1} + 2(k+1) + 1$, anche ora abbiamo la seguente tabella:

K	0	1	2	3	4	5	6	...	
$a_k = a_{k-1} + 2(k+1) + 1$	$a_0 = 4$	$a_1 = 9$	$a_2 = 16$	$a_3 = 25$	$a_4 = 36$	$a_5 = 49$	$a_6 = 64$	...	

Ci domandiamo, di conseguenza, se vale la seguente formula:

$$a_{k-1}+2(k+1)+1 = (2+k)^2 \text{ con } k>0 \text{ e } a_0=4$$

dimostriamo questo con il principio d'induzione.

- 1) l'uguaglianza è vera per $k=1$, infatti $a_0+2(1+1)+1=(2+0)^2$ e poiché $a_0=4$ è valida l'uguaglianza.
- 2) ammettiamola vera per k e la dimostriamo per $k+1$.

$$a_{(k+1)-1}+2((k+1)+1)+1 = a_k+2((k+1)+1)+1 = a_{k-1}+2(k+1)+1 + 2((k+1)+1)+1 =$$

$$= (2+k)^2 + 2((k+1)+1)+1, \text{ per ipotesi induttiva, da cui}$$

$$(2+k)^2 + 2(k+2)+1 = ((2+k)+1)^2 = (2+(k+1))^2; \text{ quindi si ha:}$$

$$a_{(k+1)-1}+2((k+1)+1)+1 = (2+(k+1))^2$$

Ciò che si osserva, quindi, è che nei metodi di risoluzione possono esserci delle equivalenze logico-numeriche; le quali devono/possono essere soggette a dimostrazione. Il "possono" potrebbe non essere sempre possibile, di conseguenza da ciò potrebbe venir meno il "devono"; nel senso che il problema della dimostrabilità rimarrebbe aperto. Tutto ciò ci fa pensare direttamente al problema della decidibilità logica ed al teorema di Godel.