

TEOREMA DI INCOMPLETEZZA DI GODEL

Tale teorema, operando un'estrema sintesi, dice che esistono delle proposizioni indecidibili, cioè delle quali non possiamo dimostrarne la verità o la falsità, che però sono vere.

La dimostrazione che segue fa riferimento a quella originale di Godel, contenuta nel libro: Opere di Godel, volume primo Casa Ed. Bollati Boringhieri.

Godel costruisce una proposizione che, in sostanza, dice di sé stessa di non essere dimostrabile. Ciò conduce al paradosso del mentitore, in maniera esplicita.

Passi della dimostrazione.

- 1) Mediante un procedimento di aritmetizzazione, nel quale si sfruttano i numeri primi, si attribuisce ad ogni proposizione nell'unica variabile a , in maniera univoca, un certo numero n . Possiamo quindi elencare in successione tutte le proposizioni; ogni proposizione P avrà il suo numero identificativo $P(a)=n$.
- 2) Tali proposizioni avranno la variabile che potrà avere valori nell'insieme dei numeri naturali.
- 3) Consideriamo la proposizione $[P(n),n]$ nella quale al posto della variabile abbiamo messo il suo numero rappresentativo n .
- 4) Sia K un insieme di numeri naturali così definito:
" n appartiene a K se e solo se $[P(n),n]$ non è dimostrabile"
Ebbene, la proposizione a sinistra della coimplicazione avrà il suo numero identificativo q e farà parte della successione di proposizioni di cui al punto 1; sia $[P(q),q]$ questa proposizione. **Ebbene, tale proposizione è indecidibile ed è quella cercata da Godel.**
- 5) Infatti, se la proposizione fosse dimostrabile allora sarebbe vera e cioè q apparterrebbe a K , ma in base alla sua definizione $[P(q),q]$ dovrebbe essere indimostrabile. Quindi siamo pervenuti ad una contraddizione.
- 6) Se invece fosse indimostrabile, quindi sarebbe falsa e cioè q non apparterrebbe a K e quindi $[P(q),q]$, sarebbe dimostrabile.; anche questa è una contraddizione.

In definitiva abbiamo una proposizione che dice di sé stessa di non essere dimostrabile; dal momento che abbiamo visto essere indecidibile e quindi indimostrabile, allora è vera.