

SVILUPPO DI

FOURIER DELLA FUNZIONE $f(x)=x|x|$ 1-PERIODICA IN $[-1/2,1/2]$

E' una funzione dispari. Per renderla periodica dobbiamo però apportare una piccola variazione; e cioè agli estremi $-1/2$ e $1/2$ deve assumere lo stesso valore. Variamo quindi la definizione in questo modo: $f(x)=x|x|$ per $-1/2 \leq x < 1/2$ e $f(x)=-1/4$ per $x=1/2$. Avremo quindi un salto (disc. di prima specie in $x=1/2$). Questa precisazione è importante al fine di applicare in modo opportuno il teorema di Dirichlet.

Essendo una funzione dispari, nello sviluppo in serie compariranno solo termini in seno. Preliminarmente operiamo una trasformazione del periodo, in modo da ottenere il periodo 2π . Avremo quindi:
 $f(x)=\sum b(n) \sin 2\pi n x$, dove $b(n)=4 \int_0^{1/2} x^2 \sin 2\pi n x \, dx$ dove l'integrale è definito ed è esteso all'intervallo $[0,1/2]$.

Facendo gli opportuni calcoli si avranno i seguenti risultati:

il termine $b(n)$ sarà:

$$\#1: \frac{(-(\pi \cdot n)^2 + 2) \cdot \cos(\pi \cdot n) - 2}{2 \cdot (\pi \cdot n)^3}$$

Quindi si avrà la serie, limitata ai primi 100 termini:

$$\#2: \sum_{n=1}^{100} \frac{((-\pi \cdot n)^2 + 2) \cdot \cos(\pi \cdot n) - 2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot x)}{2 \cdot (\pi \cdot n)^3}$$

I cui 100 termini sono:

$$\begin{aligned} \#3: & - \frac{\sin(200 \cdot \pi \cdot x)}{200 \cdot \pi} + \frac{(9801 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \sin(198 \cdot \pi \cdot x)}{1940598 \cdot \pi^3} - \frac{\sin(196 \cdot \pi \cdot x)}{196 \cdot \pi} + \\ & \frac{(9409 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \sin(194 \cdot \pi \cdot x)}{1825346 \cdot \pi^3} - \frac{\sin(192 \cdot \pi \cdot x)}{192 \cdot \pi} + \\ & \frac{(9025 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \sin(190 \cdot \pi \cdot x)}{1714750 \cdot \pi^3} - \frac{\sin(188 \cdot \pi \cdot x)}{188 \cdot \pi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(8649 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(186 \cdot \pi \cdot x)}{1608714 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(184 \cdot \pi \cdot x)}{184 \cdot \pi} + \\
& \frac{(8281 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(182 \cdot \pi \cdot x)}{1507142 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(180 \cdot \pi \cdot x)}{180 \cdot \pi} + \\
& \frac{(7921 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(178 \cdot \pi \cdot x)}{1409938 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(176 \cdot \pi \cdot x)}{176 \cdot \pi} + \\
& \frac{(7569 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(174 \cdot \pi \cdot x)}{1317006 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(172 \cdot \pi \cdot x)}{172 \cdot \pi} + \\
& \frac{(7225 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(170 \cdot \pi \cdot x)}{1228250 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(168 \cdot \pi \cdot x)}{168 \cdot \pi} + \\
& \frac{(6889 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(166 \cdot \pi \cdot x)}{1143574 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(164 \cdot \pi \cdot x)}{164 \cdot \pi} + \\
& \frac{(6561 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(162 \cdot \pi \cdot x)}{1062882 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(160 \cdot \pi \cdot x)}{160 \cdot \pi} + \\
& \frac{(6241 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(158 \cdot \pi \cdot x)}{986078 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(156 \cdot \pi \cdot x)}{156 \cdot \pi} + \\
& \frac{(5929 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(154 \cdot \pi \cdot x)}{913066 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(152 \cdot \pi \cdot x)}{152 \cdot \pi} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(5625 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(150 \cdot \pi \cdot x)}{843750 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(148 \cdot \pi \cdot x)}{148 \cdot \pi} + \\
& \frac{(5329 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(146 \cdot \pi \cdot x)}{778034 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(144 \cdot \pi \cdot x)}{144 \cdot \pi} + \\
& \frac{(5041 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(142 \cdot \pi \cdot x)}{715822 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(140 \cdot \pi \cdot x)}{140 \cdot \pi} + \\
& \frac{(4761 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(138 \cdot \pi \cdot x)}{657018 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(136 \cdot \pi \cdot x)}{136 \cdot \pi} + \\
& \frac{(4489 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(134 \cdot \pi \cdot x)}{601526 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(132 \cdot \pi \cdot x)}{132 \cdot \pi} + \\
& \frac{(4225 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(130 \cdot \pi \cdot x)}{549250 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(128 \cdot \pi \cdot x)}{128 \cdot \pi} + \\
& \frac{(3969 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(126 \cdot \pi \cdot x)}{500094 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(124 \cdot \pi \cdot x)}{124 \cdot \pi} + \\
& \frac{(3721 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(122 \cdot \pi \cdot x)}{453962 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(120 \cdot \pi \cdot x)}{120 \cdot \pi} + \\
& \frac{(3481 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(118 \cdot \pi \cdot x)}{410758 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(116 \cdot \pi \cdot x)}{116 \cdot \pi} +
\end{aligned}$$

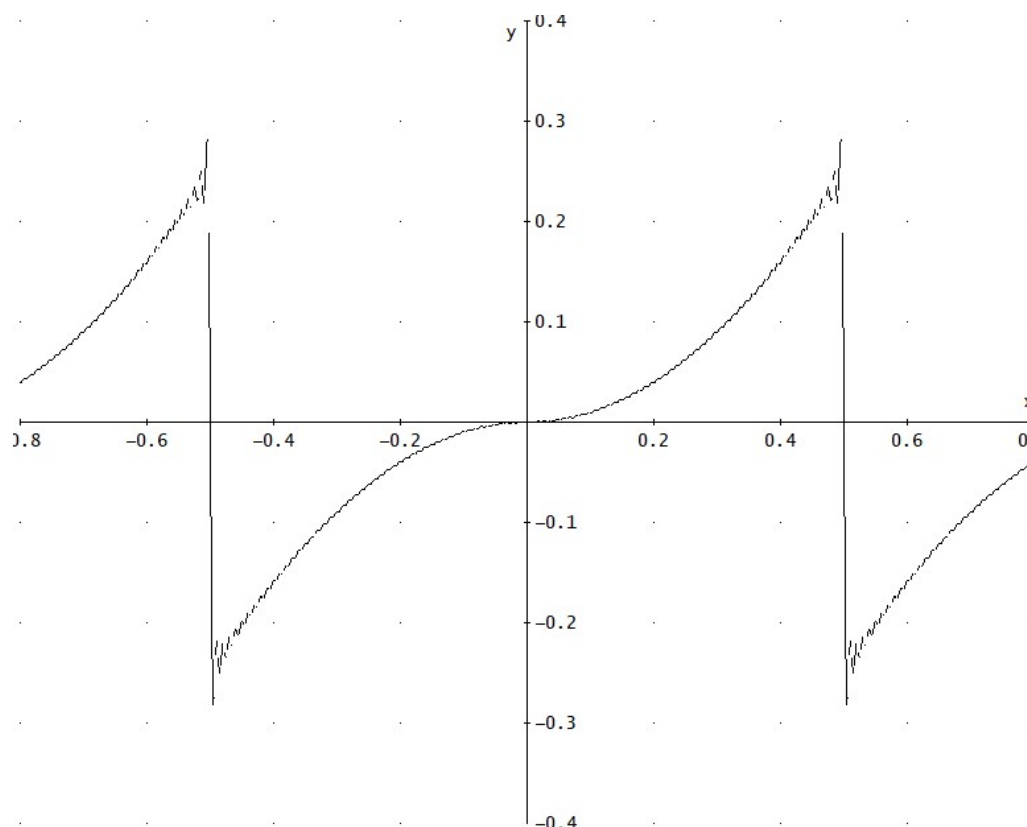
$$\begin{aligned}
& \frac{(3249 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(114 \cdot \pi \cdot x)}{370386 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(112 \cdot \pi \cdot x)}{112 \cdot \pi} + \\
& \frac{(3025 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(110 \cdot \pi \cdot x)}{332750 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(108 \cdot \pi \cdot x)}{108 \cdot \pi} + \\
& \frac{(2809 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(106 \cdot \pi \cdot x)}{297754 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(104 \cdot \pi \cdot x)}{104 \cdot \pi} + \\
& \frac{(2601 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(102 \cdot \pi \cdot x)}{265302 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(100 \cdot \pi \cdot x)}{100 \cdot \pi} + \\
& \frac{(2401 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(98 \cdot \pi \cdot x)}{235298 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(96 \cdot \pi \cdot x)}{96 \cdot \pi} + \\
& \frac{(2209 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(94 \cdot \pi \cdot x)}{207646 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(92 \cdot \pi \cdot x)}{92 \cdot \pi} + \\
& \frac{(2025 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(90 \cdot \pi \cdot x)}{182250 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(88 \cdot \pi \cdot x)}{88 \cdot \pi} + \\
& \frac{(1849 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(86 \cdot \pi \cdot x)}{159014 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(84 \cdot \pi \cdot x)}{84 \cdot \pi} + \\
& \frac{(1681 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(82 \cdot \pi \cdot x)}{137842 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(80 \cdot \pi \cdot x)}{80 \cdot \pi} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1521 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(78 \cdot \pi \cdot x)}{118638 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(76 \cdot \pi \cdot x)}{76 \cdot \pi} + \\
& \frac{(1369 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(74 \cdot \pi \cdot x)}{101306 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(72 \cdot \pi \cdot x)}{72 \cdot \pi} + \\
& \frac{(1225 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(70 \cdot \pi \cdot x)}{85750 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(68 \cdot \pi \cdot x)}{68 \cdot \pi} + \\
& \frac{(1089 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(66 \cdot \pi \cdot x)}{71874 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(64 \cdot \pi \cdot x)}{64 \cdot \pi} + \\
& \frac{(961 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(62 \cdot \pi \cdot x)}{59582 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(60 \cdot \pi \cdot x)}{60 \cdot \pi} + \\
& \frac{(841 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(58 \cdot \pi \cdot x)}{48778 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(56 \cdot \pi \cdot x)}{56 \cdot \pi} + \\
& \frac{(729 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(54 \cdot \pi \cdot x)}{39366 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(52 \cdot \pi \cdot x)}{52 \cdot \pi} + \\
& \frac{(625 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(50 \cdot \pi \cdot x)}{31250 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(48 \cdot \pi \cdot x)}{48 \cdot \pi} + \\
& \frac{(529 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(46 \cdot \pi \cdot x)}{24334 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(44 \cdot \pi \cdot x)}{44 \cdot \pi} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(441 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(42 \cdot \pi \cdot x)}{18522 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(40 \cdot \pi \cdot x)}{40 \cdot \pi} + \\
& \frac{(361 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(38 \cdot \pi \cdot x)}{13718 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(36 \cdot \pi \cdot x)}{36 \cdot \pi} + \\
& \frac{(289 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(34 \cdot \pi \cdot x)}{9826 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(32 \cdot \pi \cdot x)}{32 \cdot \pi} + \\
& \frac{(225 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(30 \cdot \pi \cdot x)}{6750 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(28 \cdot \pi \cdot x)}{28 \cdot \pi} + \\
& \frac{(169 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(26 \cdot \pi \cdot x)}{4394 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(24 \cdot \pi \cdot x)}{24 \cdot \pi} + \\
& \frac{(121 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(22 \cdot \pi \cdot x)}{2662 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(20 \cdot \pi \cdot x)}{20 \cdot \pi} + \\
& \frac{(81 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(18 \cdot \pi \cdot x)}{1458 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(16 \cdot \pi \cdot x)}{16 \cdot \pi} + \\
& \frac{(49 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(14 \cdot \pi \cdot x)}{686 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(12 \cdot \pi \cdot x)}{12 \cdot \pi} + \\
& \frac{(25 \cdot \pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(10 \cdot \pi \cdot x)}{250 \cdot \pi^3} - \frac{\text{SIN}(8 \cdot \pi \cdot x)}{8 \cdot \pi} +
\end{aligned}$$

$$\frac{(9\pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(6\pi \cdot x)}{54\pi} - \frac{\text{SIN}(4\pi \cdot x)}{4\pi} + \frac{(\pi^2 - 4) \cdot \text{SIN}(2\pi \cdot x)}{2\pi}$$

Si vede graficamente quello che ci attendevamo.



Completiamo ora lo studio applicando in modo completo il teorema di Dirichlet. Nel punto di discontinuità $x=1/2$ (e in tutti gli altri a meno del periodo) si ha che la somma della serie è la media aritmetica dei limiti destro e sinistro, cioè 0. Assumendo la funzione valori diversi in tali punti (n.b. i valori dei limiti) , da destra e da sinistra, si ha che la serie in $1/2$ non converge alla funzione.