SUCCESSIONE DI FIBONACCI E NUMERO AUREO

Data la successione di Fibonacci costruita con la formula ricorsiva

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} ; x_0 = 0 ; x_1 = 1 ;$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

consideriamo la successione dei rapporti tra due numeri consecutivi della stessa successione:

$$\frac{1}{1} , \frac{2}{1} , \frac{3}{2} , \frac{5}{3} , \frac{8}{5} , \frac{13}{8} ,............, \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} ,.......$$

Si dimostra essere questa successione crescente e limitata , quindi è convergente.
Possiamo quindi, per n tendente all'infinito, considerare questa uguaglianza:

$$\frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{x_{n-1}}$$

Considerati i valori del numeratore e del denominatore all'infinito, poichè abbiamo visto essere la successione dei rapporti convergente, possiamo considerare la seguente equazione: $\frac{x'}{x} = \frac{x' + x}{x'}$
dove x' è il successivo di x nella successione di Fibonacci all'infinito.

Invertendo, si ha la proporzione: $x : x' = x' : (x' + x)$ che è proprio quella della parte aurea x' di un segmento lungo $x' + x$.

Si ottiene cosi l'equazione $(x')^2 - xx' - x^2 = 0$ che risolta dà: $x' = \frac{x(1 \pm \sqrt{5})}{2}$ e cioè, considerando la radice positiva, $\frac{x'}{x} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$, che è proprio il numero aureo che ci si aspettava dalla proporzione data in precedenza.

Lecce marzo 2014 Angelo Toma