COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Siano a_1, a_2, ..., a_n n elementi e vogliamo, con questi, formare raggruppamenti di k elementi che si differenzino tra loro per almeno un elemento e tali che un elemento possa ripetersi. Ad esempio $a_1\ a_1\ a_1 \dots a_1$ (k-pla) ed $a_1\ a_1\ a_1 \dots a_2$ (k-pla) etc. Vogliamo trovare il numero di tali raggruppamenti, cioè, dimostrare la formula:

$C^r_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Detto quindi $C^r_{n,k}$ il numero delle combinazioni con ripetizione da trovare, il numero di tutti gli elementi presenti sarà $k\, C^r_{n,k}$, in quanto ogni combinazione ha k elementi. Chiamando con N il numero di presenze di un dato elemento a_i, tutti gli elementi saranno quindi nN.

Si ha quindi $nN = k\, C^r_{n,k}$, da cui $N = \frac{k\, C^r n{,}k}{n}$.

Togliendo ora una sola volta l'elemento a_i dalle k-ple, i raggruppamenti (k-1 ple) risultanti saranno le combinazioni con ripetizione di n elementi a gruppi di k-1. Si ha allora che il numero totale di elementi a_i nelle $C^r n, (k-1)$ sarà $\frac{(k-1) C^r n{,}(k-1)}{n}$. Se a questo sommiamo il numero di raggruppamenti mancanti dell'elemento a_i, cioè $C^r n, (k-1)$, otteniamo il numero totale di elementi a_i, cioè N.

Si ha allora $N = \frac{(k-1) C^r n{,}(k-1)}{n} + C^r n, (k-1) = \frac{k\, C^r n{,}k}{n}$ da cui:

$$\frac{(k-1) C^r n{,}(k-1)}{n} + C^r n, (k-1) = \frac{k\, C^r n{,}k}{n}$$

$$(k-1) C^r n, (k-1) + n C^r n, (k-1) = k\, C^r n, k$$

$$(n+k-1)\, C^r n, (k-1) = k\, C^r n, k$$

$$\frac{(n+k-1)\, C^r n{,}(k-1)}{k} = C^r n, k$$

Al variare di k si avrà:

$$C^r n, (k-1) = \frac{(n+k-2) C^r n{,}(k-2)}{k-1}$$

$$C^r n, (k-2) = \frac{(n+k-3) C^r n{,}(k-3)}{k-2}$$

$$C^r n, 2 = \frac{(n+1) C^r n{,}1}{2}$$

$$C^r n, 1 = n$$

Quindi: $C^r n, k = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{k(k-1)\dots 2} = \binom{n+k-1}{k}$

COMBINAZIONI SEMPLICI

Dimostriamo ora la formula per le combinazioni semplici $C_{n,k} = \binom{n}{k}$

Se con $C_{n,k}$ indichiamo il numero di combinazioni semplici di n elementi presi a k a k in modo che due raggruppamenti si distinguano solo per la presenza di almeno un elemento(ad esempio, nel caso di 4 elementi combinati a 3 a 3 : abc=bca, abc ≠abd etc.), il numero totale di elementi presenti in tutte le combinazioni sarà dato da: nN=k $C_{n,k}$ dove N indica il numero di elementi del tipo a_i (ricordiamo che gli elementi sono: a_1, a_2, ...,a_n) rientranti in alcune delle combinazioni . Il numero N sarà quindi dato da: $\frac{k\,C_{n,k}}{n}$ che sarà uguale a (immaginando di togliere l'elemento a_i dalle combinazioni nelle quali questo è presente, ottenendo così le combinazioni di n-1 elementi a k-1 a k-1) : $C_{n-1,k-1}$.

Si ha allora : $\frac{k\,C_{n,k}}{n} = C_{n-1,k-1}$, da cui si ottiene la formula ricorsiva $C_{n,k} = \frac{n}{k} C_{n-1,k-1}$.

Operando quindi in modo ricorsivo si ha:

$C_{n,k} = \frac{n}{k} C_{n-1,k-1}$, $C_{n-1,k-1} = \frac{n-1}{k-1} C_{n-2,k-2}$, ... ,$C_{n-(k-1),k-(k-1)} = \frac{n-k+1}{1}$; da cui si ottiene:

$$C_{n,k} = \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\,\frac{n-2}{k-2}\ldots\frac{n-k+1}{1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Osservazioni finali.

In queste due dimostrazioni abbiamo ragionato sulle presenze degli elementi nei raggruppamenti nelle combinazioni, in maniera ricorsiva.