L’importanza della proprietà associativa.

In questo lavoro si sottolinea l’uso della proprietà associativa, nel caso di somme finite e nel caso di somme infinite di numeri naturali. Vedremo quindi che a seconda dei due casi potremmo pervenire a dei risultati di somme di serie paradossali, tra le quali alcune dovute a Eulero.

Nel caso di somme finite si ha: $a+b+c+d=(a+b)+c+d=(a+b+c)+d$ etc. ; possiamo quindi raggruppare gli addendi nei vari modi disponibili.

Cosa accade nel caso in cui gli addendi sono infiniti? Possiamo allora ipotizzare che valga o meno la proprietà associativa. Vedremo allora che, nel caso della ipotesi di validità, perverremo a dei risultati paradossali.

Sia la serie $s = 1-1+1-1+1-1\ldots$, vogliamo calcolarne la somma. Si nota che le varie somme parziali oscilleranno tra i valori 0 e 1 (è una serie indeterminata). Ipotizziamo ora che la proprietà associativa valga per le somme di infiniti termini. Si avrà: $s = 1-1+1-1\ldots = 1-(1-1+1-1\ldots) = 1-s$, da cui $s=1/2$.

Da questo risultato discenderanno altri risultati, paradossali anch’essi; li vediamo:

$1-2+3-4+5\ldots=1/4$ (dovuto a Eulero); ne facciamo una dimostrazione:

$1-2+3-4+5-7\ldots= 1+(-1-1)+(2+1)+(-1-3)+(1+4)+\ldots= (1-1+1\ldots) - (1-2+3-4\ldots) =1/2 - (1-2+3-4\ldots)$ da cui si ottiene $1-2+3-4+5\ldots = 1/4$

Quello che abbiamo fatto è applicare la proprietà associativa (e commutativa), ad **infiniti termini**.

Un altro risultato, ottenibile anche con la funzione zeta di Riemann è questo:

$1+2+3+4+5+\ldots= -1/12$; ne diamo una dimostrazione.

$1+2+3+4+5+6+\ldots= 1+(4-2)+3+(8-4)+5+(12-6)+\ldots= (1-2+3-4+5\ldots)+(4+8+12+\ldots) =$

$= (1-2+3-4+5\ldots)+4(1+2+3+\ldots) = 1/4+4(1+2+3+4\ldots)$ da cui $1+2+3+4\ldots= -1/12$

Anche qui abbiamo usato la proprietà associativa su infiniti termini.

Vediamo ora **altri risultati paradossali**.

a) $1+1+1+1+1+\ldots=-1/12$. Ne vediamo la dimostrazione, anche qui applicando la proprietà associativa.
$1+1+1+1+1+1+1+\ldots= 1+(1+1)+(1+1+1)+(1+1+1+1+)+\ldots= 1+2+3+4+\ldots= -1/12$

b) La somma di infiniti (addendi) numeri naturali è uguale a -1/12, lo dimostriamo così:
$p+q+r+\ldots= \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{p\ \text{volte}} + \underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{q\ \text{volte}} + \underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{r\ \text{volte}} + \ldots =1+1+1+1+\ldots= -1/12$

c) La somma di finiti (addendi) numeri naturali è uguale a 0. Infatti, si ha:

$p+q+r+l+m+\ldots= (p+q+r)+l+m+\ldots= (p+q+r)+(l+m+\ldots) =(p+q+r) - 1/12 = - 1/12$, da cui $p+q+r=0$

Il tutto vale per un numero finito generico di addendi.

In definitiva le domande susseguenti sono:

1) la proprietà associativa vale solo per somme di un numero finito di addendi numeri naturali, o vale anche per somme di infiniti addendi, ottenendo dei risultati paradossali?
2) a seconda dell'ipotesi sulla proprietà associativa, si possono avere vari contesti algebrici (varie strutture)?
3) all'infinito accadono cose che non lo sono al finito?

Questo può essere uno spunto di riflessione.

Lecce luglio 2018 Angelo Toma